

Mô hình số một chiều mô phỏng sạt lở đất trên mái dốc lớn: Lý thuyết và kiểm chuẩn với mô hình giải tích

Phạm Văn Khôi^{1*}, Vũ Văn Nghi²

¹Khoa Công trình, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, 484 Lạch Tray, phường Kênh Dương, quận Lê Chân, TP Hải Phòng, Việt Nam

²Viện Xây dựng, Trường Đại học Giao thông Vận tải TP Hồ Chí Minh, 2 Võ Oanh, phường 25, quận Bình Thạnh, TP Hồ Chí Minh, Việt Nam

Ngày nhận bài 9/5/2022; ngày chuyển phản biện 11/5/2022; ngày nhận phản biện 30/5/2022; ngày chấp nhận đăng 2/6/2022

Tóm tắt:

Ở những khu vực địa hình dốc, sạt lở đất có thể xảy ra khi mưa lớn kéo dài và gây thiệt hại nghiêm trọng đến tính mạng con người và tài sản. Mô hình số mô phỏng sạt lở đất dự báo sạt lở đất hiệu quả và tiết kiệm thời gian hơn mô hình vật lý mà vẫn đảm bảo độ chính xác. Trong bài báo này, hệ phương trình phi tuyến nước nông một chiều sử dụng hệ tọa độ tổng thể được thiết lập là hệ phương trình chủ đạo của mô hình số đề xuất. Phương pháp hỗn hợp sai phân hữu hạn - thể tích hữu hạn, phương pháp ẩn và kỹ thuật tự động điều chỉnh bước thời gian mô phỏng giúp cho mô hình ổn định khi mô phỏng sạt lở đất trên mái dốc lớn. Để kiểm chuẩn với mô hình giải tích, các tác giả tiếp tục thiết lập hệ phương trình chủ đạo ở dạng không thứ nguyên. Kết quả kiểm chuẩn cho thấy sự phù hợp nhất định của mô hình số so với mô hình giải tích. Mô hình số cho thấy sự phù hợp khi giải bài toán sạt lở đất, sạt lở đất tạo sóng thần, đặc biệt trong điều kiện mái dốc sạt lở.

Từ khóa: mái dốc lớn, mô hình giải tích, mô hình số, phương trình phi tuyến nước nông một chiều, sạt lở đất.

Chỉ số phân loại: 2.1

1. Mở đầu

Khi mưa lớn kéo dài, nước mưa sẽ thấm vào lỗ rỗng trong đất làm giảm lực ma sát của đất, gây ra hiện tượng sạt lở. Mô hình số mô phỏng sạt lở đất đã được nghiên cứu từ sớm do ưu điểm tiết kiệm chi phí so với thực hiện thí nghiệm mô hình vật lý. Mô hình sạt lở đất 3 chiều (dùng hệ phương trình Navier Stokes) có ưu điểm là mô phỏng khá chính xác, nhưng nhược điểm lớn nhất là thời gian mô phỏng lâu, hao tổn tài nguyên máy tính. Do đó, mô hình 2 chiều đã được phát triển bằng cách tích phân hệ phương trình Navier Stokes theo phương chiều sâu. S.B. Savage và cs (1989) [1] đã thiết lập mô hình sạt lở đất 2 chiều đầu tiên khi sử dụng hệ phương trình phi tuyến nước nông trên hệ tọa độ địa phương, trong đó biến chiều sâu sạt lở có phương vuông góc với đáy không xói và biến vận tốc có phương song song với đáy không xói. Những nghiên cứu cải tiến sau đó để tăng độ chính xác và miền áp dụng, tuy nhiên vẫn dựa trên hệ tọa độ địa phương [2, 3]. Nhóm nghiên cứu của R.M. Iverson và cs (2001) [2] đã phát triển cả mô hình sạt lở đất dùng hệ tọa độ địa phương [2] và hệ tọa độ tổng thể [4] - hệ tọa độ mà chiều sâu sạt lở theo phương thẳng đứng. E.D.F. Nieto và cs (2008) [5] đã chỉ ra rằng, khi dùng hệ tọa độ địa phương, cần một bước chuyển đổi sang hệ tọa độ tổng thể rồi mới áp dụng các phương pháp số thích hợp để mô phỏng bài toán sạt lở. Vì thế, việc sử dụng trực tiếp hệ tọa độ tổng thể ngay từ khi thiết lập phương trình chủ đạo giúp tiết kiệm thời gian và tường minh đối với các nghiên cứu sạt lở đất sau này.

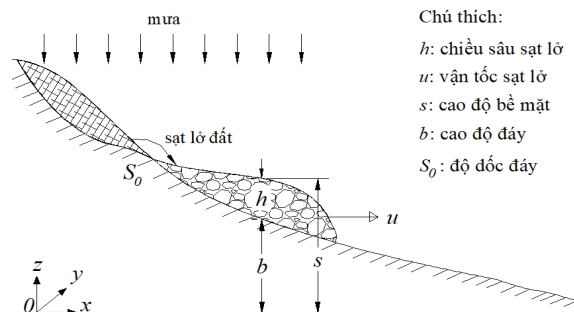
*Tác giả liên hệ: Email: khoipv.ctt@vimaru.edu.vn.

Trong nghiên cứu này, các tác giả mô phỏng sạt lở đất dùng hệ phương trình phi tuyến nước nông với ẩn số là chiều sâu sạt lở và vận tốc sạt lở theo hệ tọa độ tổng thể. Phương pháp thể tích hữu hạn giải vi phân theo không gian, phương pháp ẩn giải vi phân theo thời gian. Thêm vào đó, kỹ thuật tự động điều chỉnh bước thời gian mô phỏng giúp cho mô hình ổn định khi mô phỏng sạt lở đất trên mái dốc lớn. Lời giải số được kiểm chuẩn với lời giải giải tích cho bài toán sạt lở đất trên mái dốc lớn.

2. Mô hình số mô phỏng sạt lở đất

2.1. Thiết lập hệ phương trình chủ đạo

Hình 1 thể hiện miền tính toán và các đại lượng được sử dụng để thiết lập hệ phương trình chủ đạo của mô hình. Trong



Hình 1. Sơ đồ và các biến tính toán mô hình sạt lở đất trong hệ tọa độ tổng thể.

One-dimensional numerical model of landslide over high-steep slopes: Theory and verification to the analytical solution

Van Khoi Pham^{1*}, Van Nghi Vu²

¹Faculty of Civil Engineering, Vietnam Maritime University, 484 Lach Tray, Kênh Duong Ward, Le Chan District, Hai Phong City, Vietnam

²Institute of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Transport, 2 Vo Oanh Street, Ward 25, Binh Thanh District, Ho Chi Minh City, Vietnam

Received 9 May 2022; revised 30 May 2022; accepted 2 June 2022

Abstract:

At the steep slope areas, landslide events may suddenly occur due to prolonged heavy rain and seriously affect humans' lives and their properties. Numerical models simulating landslides help us to predict the real landslide phenomenon effectively because they are not only time-saving compared to physical models but also acceptable accuracy. In this paper, the one-dimensional nonlinear shallow water equations using the global coordinate system are established as the proposed model governing equations. The hybrid finite difference-finite volume method, the implicit method and the automatical time step controlling technique are employed to stably simulate the landslide events over the high-steep slopes. To validate the proposed numerical model to the analytical solution, authors continuously derive the non-dimensional governing equations in one dimension as well as using the global coordinate system. The numerical results are in good agreement with the analytical solution. The proposed numerical model can be used to simulate the landslides and the landslide-induced tsunami events, especially for simulating the high-steep slope conditions.

Keywords: analytical model, high-steep slope, landslide, numerical model, one-dimensional nonlinear shallow water equations.

Classification number: 2.1

hình 1, $h = s - b$ là biến chiều sâu sạt lở, trong đó s và b là cao độ bề mặt sạt và cao độ đáy không xói tính từ mặt tham chiếu. Trong nghiên cứu này, giả thuyết gần đúng rằng hỗn hợp đất, đá, sỏi, nước... khi chuyển động thuộc dạng dòng chảy mảnh vỡ và coi hỗn hợp như chất lỏng không nén được. Áp dụng phương trình liên tục cho chất lỏng không nén được, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Với: u, v, w là các biến lưu tốc theo các phương x, y, z tương ứng.

Điều kiện biên bề mặt và điều kiện biên đáy không xói của khối sạt lở được xác định theo các công thức sau:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} - w = 0, \quad z = s \quad (2)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} - w = 0, \quad z = b \quad (3)$$

Tích phân phương trình (1) từ đáy tới bề mặt khối sạt được:

$$\int_b^s \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz - \frac{\partial s}{\partial x} u_{z=s} + \frac{\partial b}{\partial x} u_{z=b} \quad (4)$$

Áp dụng quy tắc Leibnitz được:

$$\int_b^s \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz - \frac{\partial s}{\partial x} u_{z=s} + \frac{\partial b}{\partial x} u_{z=b} \quad (5)$$

$$\int_b^s \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz - \frac{\partial s}{\partial y} v_{z=s} + \frac{\partial b}{\partial y} v_{z=b} \quad (6)$$

Kết hợp điều kiện biên công thức (2) và (3) thu được phương trình liên tục cho bài toán 2 chiều như sau:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Biến đổi về phương trình liên tục cho bài toán một chiều sử dụng trong nghiên cứu này được:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Phương trình động lượng theo phương x được định nghĩa như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (9)$$

trong đó: $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ là các thành phần ứng suất cắt. Ta chỉ xét các đại lượng trong mặt phẳng (x, z) nên τ_{xx}, τ_{yx} bằng 0. Trong phương trình (9), đại lượng áp suất p được xấp xỉ như áp suất thủy tĩnh của chất lỏng, do đó:

$$p = \rho g(s - z) \quad (10)$$

trong đó: ρ là khối lượng riêng của chất lỏng; g là gia tốc trọng trường (9,81 m/s²).

Thêm đại lượng $u(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z) = 0$ vào phương trình (9) để thu được phương trình sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} \quad (11)$$

trong đó: $-\partial b/\partial x (= S_0 = \tan \theta)$ là hệ số mái dốc đáy không xói (θ là góc dốc). Tích phân phương trình (11) từ đáy tới bề mặt, áp dụng quy tắc Leibnitz và dùng các phương trình điều kiện

biên (2) và (3), sau khi bỏ qua thành phần ứng suất cắt trên bề mặt tự do của khối sạt, đưa đến phương trình động lượng như sau:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial h u v}{\partial y} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} = ghS_0 - \frac{1}{\rho} \tau_{zx}^{z=b} \quad (12)$$

Tương tự, phương trình động lượng cho bài toán một chiều được rút ngắn gọn là:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} = ghS_0 - \frac{1}{\rho} \tau_{zx}^{z=b} \quad (13)$$

hoặc

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} = gh(S_0 - S_f) \quad (14)$$

trong đó: $\tau_{zx}^{z=b} = \rho g h S_f$. Theo nguyên tắc lực cân Voellmy thì hệ số sức cản S_f được phân chia thành 2 thành phần là ma sát bề mặt đáy không xói và nội ma sát [6] được thể hiện bởi công thức:

$$S_f = \frac{u|u|}{C_z^2 h} + \mu \cos \theta \quad (15)$$

trong đó: C_z và μ là hệ số Sedi (đặc trưng bởi tính nhám $C_z = h^{1/6}/n$, n là hệ số nhám Manning) và hệ số hiệu quả nội ma sát của đất (đặc trưng bởi góc ma sát trong của đất $\mu = \tan \varphi$, φ là góc nội ma sát của đất).

Phương trình (8) và (14) kết hợp lại thành hệ phương trình phi tuyến nước nông một chiều cho bài toán sạt lở đất được giới thiệu trong nghiên cứu này.

2.2. Phương pháp số giải hệ phương trình chủ đạo

Hệ phương trình chủ đạo dùng để tính toán sạt lở đất được viết dưới dạng bảo toàn như sau:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(U) \quad (16)$$

với:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \left(S_0 - \frac{u|u|}{C_z^2 h} - \mu \cos \theta \right) \end{bmatrix} \quad (19)$$

trong đó: $U, F(U), H(U)$ tương ứng là biến bảo toàn, thành phần thông lượng, thành phần nguồn của hệ phương trình phi tuyến

nước nông bảo toàn (16). Để giải vi phân theo thời gian, hệ phương trình (16) được giải bằng phương pháp phân tách từng bước. Ở bước thứ nhất, đưa hệ phương trình về dạng thuần nhất để giải ra nghiệm thuần nhất như sau:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

$$U_i^{adv} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}] \quad (21)$$

trong đó: “ n ” ứng với bước thời gian hiện tại, chỉ số trên; “ adv ”: ứng với kết quả của lời giải số ở bước thứ nhất và chỉ số dưới; “ i ”: ứng với vị trí tâm phần tử thể tích hữu hạn trong miền tính toán. Ở bước thứ hai, nghiệm cuối cùng của biến bảo toàn U thu được bằng cách thêm thành phần nguồn trong phương trình động lượng như sau:

$$\frac{dU}{dt} = H(U^{adv}) \quad (22)$$

Để tránh mất ổn định số học do ảnh hưởng của lực cản ma sát trong thành phần nguồn, phương pháp ẩn được sử dụng trong nghiên cứu này [7]. Sử dụng đại lượng thông lượng $P = hu$, phương trình động lượng ở bước thứ hai này trở thành:

$$\frac{dP}{dt} = gh^{adv} \left(S_0 - \mu \cos \theta - \frac{P|P|}{(h^{adv})^3} \right) \quad (23)$$

Do đó, lời giải cho biến bảo toàn ở bước thời gian $(n+1)$ như sau:

$$\frac{P^{n+1} - P^{adv}}{\Delta t} = E^{adv} - F^{adv} P^{n+1} \quad (24)$$

Với:

$$E^{adv} = gh^{adv} (S_0 - \mu \cos \theta) \quad (25)$$

$$F^{adv} = \frac{g|P^{adv}|}{C_z^2 (h^{adv})^2} \quad (26)$$

Cuối cùng, lời giải số cho biến bảo toàn biến bảo toàn thu được từ phương trình sau:

$$P^{n+1} = \frac{P^{adv} + \Delta t E^{adv}}{1 + \Delta t F^{adv}} \quad (27)$$

Tích phân theo không gian hệ phương trình phi tuyến nước nông dạng bảo toàn (16) sử dụng phương pháp hỗn hợp thể tích hữu hạn - sai phân hữu hạn. Trong đó, phương pháp sai phân hữu hạn được sử dụng để tính thành phần hệ số mác đốc:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} \quad (28)$$

Phương pháp thể tích hữu hạn được sử dụng để giải thành phần thông lượng F(U):

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \text{sign}(c_k) A_{i+1/2}^k \Delta F_{i+1/2}^k \quad (29)$$

trong đó: $F_{i+1/2}$ là giá trị thông lượng tại giao diện của hai phần tử thể tích hữu hạn thứ “i” và thứ “i+1”. Giá trị thông lượng này được tính dựa trên sự kết hợp của hai phương pháp trung bình trọng số thông lượng (WAF: Weighted average flux) và tổng biến thiên giảm dần (TVD: Total variation diminishing). Do khuôn khổ nội dung trình bày bài báo giới hạn, phương pháp này lại khá phức tạp, nên các tác giả sẽ trình bày chi tiết trong nghiên cứu tiếp theo.

2.3. Kỹ thuật tự động điều chỉnh bước thời gian mô phỏng

Các mô hình số thông thường chọn cố định bước thời gian mô phỏng và kiểm tra sự ổn định của mô hình qua hệ số ổn định Courant ($0 < CFL < 1$). Mô hình kém ổn định khi hệ số Courant lớn (gần giá trị 1) và ổn định khi hệ số Courant đủ nhỏ (gần giá trị 0). Tuy nhiên, khi hệ số Courant quá nhỏ sẽ tăng số vòng lặp và hao tổn tài nguyên máy tính.

Trong nghiên cứu này, dựa trên nguyên lý tính toán sao cho trong mỗi bước thời gian mô phỏng quãng đường mà phần tử sạt lở đất chuyển động ($\Delta l = u \Delta t$) không vượt quá kích thước lưới tính toán Δx . Khi đó, hệ số ổn định Courant được chọn cố định trước và giá trị bước thời gian Δt được điều chỉnh tự động sau mỗi lần lặp theo công thức:

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\max(|u|, u_f) + c} \quad (30)$$

trong đó: C là vận tốc lan truyền sóng; u_f là vận tốc có xét đến do các thành phần lực cản ma sát. Theo nguyên tắc lực cản Voellmy, giá trị vận tốc cản được xác định theo công thức:

$$u_f = \left[gh \left(\frac{u|u|}{C_z^2 h} + \mu \cos \theta \right) \right]^{1/2} \quad (31)$$

Việc tính toán điều chỉnh lại bước thời gian sẽ đưa ra thời gian mô phỏng tối ưu và tiết kiệm được tài nguyên máy tính.

3. Kiểm chuẩn mô hình với lời giải giải tích của Dressler

Các mô hình số sau khi thiết lập thường được kiểm chuẩn với lời giải giải tích và số liệu thí nghiệm từ mô hình vật lý. Do nội dung bài báo giới hạn nên ở nghiên cứu này, mô hình số được kiểm chuẩn với lời giải giải tích của R.F. Dressler (1958) [8]. Kiểm chuẩn với số liệu thí nghiệm vật lý sẽ được tiến hành

trong các nghiên cứu tiếp theo. R.F. Dressler (1958) [8] đã đưa ra lời giải giải tích cho bài toán mô phỏng dòng chảy phi tuyến không ổn định trên mái dốc đáy rất lớn ($\theta = 45^\circ$). Đây là góc dốc lớn nhất được sử dụng để đưa ra lời giải giải tích, các góc dốc còn lại được phân tích có giá trị nhỏ hơn như 30° hay 0° [9]. Điều kiện ban đầu cho biến chiều sâu sạt lở h của bài toán là khối vật liệu nước hình tam giác vuông cân có chiều dài cạnh là 1 m (nét chấm - gạch ở hình 2) đột ngột đổ xuống mái dốc lớn. Với mô hình số, thành phần lực cản do ma sát S_f được thiết lập bằng 0 cho phù hợp với điều kiện ban đầu của bài toán. Khối vật liệu sạt xuống do ảnh hưởng của trọng lực trong thành phần thông lượng và thành phần nguồn còn lại trong phương trình động lượng. Để so sánh được với kết quả của lời giải giải tích, hệ phương trình chủ đạo (8), (14) phải được chuyển sang dạng vô hướng như sau:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{h} \hat{u})}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial (\hat{h} \hat{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{h} \hat{u}^2 + \frac{1}{2} \hat{h}^2 \right) = \hat{h} \frac{\partial \hat{b}}{\partial \hat{x}} \quad (33)$$

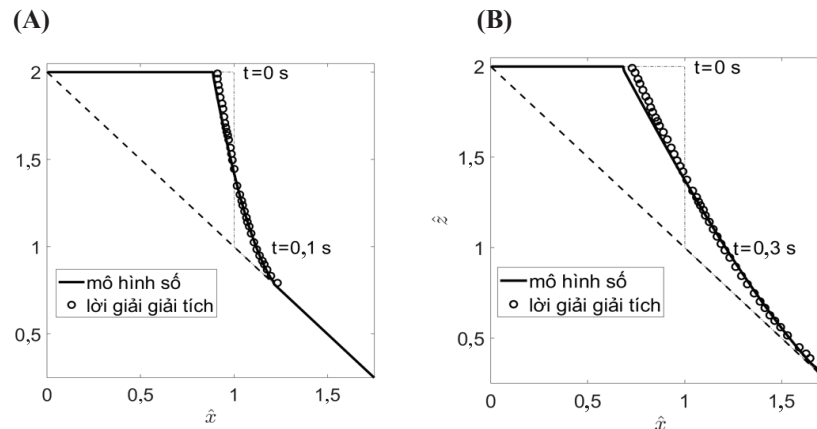
trong đó: các đại lượng có ký hiệu “mũ” là những đại lượng có hướng trong hệ phương trình chủ đạo được chuyển sang dạng vô hướng tương ứng [10] như sau:

$$x = \frac{\hat{x}}{H_0}; \quad h = \frac{\hat{h}}{H_0}; \quad b = \frac{\hat{b}}{H_0}; \quad t = \sqrt{\frac{g \cos \theta}{H_0}} \hat{t}; \quad u = \frac{\hat{u}}{\sqrt{g H_0 \cos \theta}} \quad (34)$$

trong đó: H_0 là chiều cao ban đầu lớn nhất của khối sạt trên mái dốc.

Hình 2 thể hiện kết quả kiểm chuẩn của mô hình số (nét liền) so với kết quả của lời giải giải tích (nét chấm tròn) tại các thời điểm $t=0,1$ và $0,3$ s. Trong hình 2, trục hoành là đại lượng vô hướng của trục x ($\hat{x}$) và trục tung là đại lượng vô hướng của trục z ($\hat{z}$). Sau thời điểm ban đầu $t=0$ s (nét chấm - gạch), khối đất hình tam giác vuông sạt xuống và được mô phỏng tại thời điểm $t=0,1$ s (hình 2A) và $t=0,3$ s (hình 2B). Nhìn chung, kết quả của mô hình số khá phù hợp với kết quả của lời giải giải tích tại hai thời điểm nêu trên. Tại thời điểm $t=0,3$ s có sai lệch nhỏ so với kết quả lời giải giải tích do sai số khi rời rạc hóa phép toán vì phân sang phép toán sai phân của các mô hình số là khó tránh khỏi.

Trong thực tế, góc dốc khi xảy ra sạt lở nằm trong khoảng $30-45^\circ$. Góc dốc lớn thì nguy cơ xảy ra sạt lở đất càng cao và vận tốc sạt cũng lớn hơn. Tuy nhiên, vận tốc sạt lở tăng nhanh dẫn tới bước thời gian mô phỏng quá nhỏ và làm cho kết quả mô hình số bị mất liên tục. Mô hình số mô phỏng sạt lở đất trong nghiên cứu này sử dụng các phương pháp số có thể giải quyết vấn đề mất liên tục này. Thứ nhất, phương pháp thể tích hữu hạn được cho là phù hợp để giải quyết bài toán không liên tục trong mô phỏng chuyển động của chất lỏng không nén



Hình 2. Kết quả mô phỏng sạt lở đất trên mái dốc 45° theo lời giải số và lời giải giải tích của R.F. Dressler (1958) [8]. (A) $t=0,1$ s; (B) $t=0,3$ s.

được. Thứ hai, phương pháp ẩn khi sai phân hệ phương trình chủ đạo theo thời gian sẽ làm tăng độ ổn định cho mô hình như phân tích ở phần trên. Thứ ba, mô hình trong nghiên cứu này sử dụng kỹ thuật tính toán tự động điều chỉnh bước thời gian Δt nên tăng độ ổn định cho mô hình.

4. Kết luận

Trong bài báo này, mô hình số một chiều mô phỏng sạt lở đất trên mái dốc lớn được thiết lập dựa trên chủ đạo là hệ phương trình phi tuyến nước nông. Phương pháp thể tích hữu hạn, phương pháp ẩn và kỹ thuật điều chỉnh tự động bước thời gian được áp dụng để giải hệ phương trình chủ đạo theo không gian và thời gian, đảm bảo cho lời giải số liên tục. Kết quả từ mô hình số được kiểm chuẩn với lời giải giải tích cho bài toán sạt lở đất trên mái dốc lớn để thấy được sự phù hợp của mô hình số. Trong những nghiên cứu tiếp theo, mô hình số sẽ được kiểm chuẩn với số liệu thí nghiệm và áp dụng mô phỏng hiện tượng sạt lở đất trong thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S.B. Savage, K. Hutter (1989), “The motion of a finite mass of granular material down a rough incline”, *J. Fluid. Mech.*, **199**, pp.177-215, DOI: 10.1017/S0022112089000340.

[2] R.M. Iverson, R.P. Denlinger (2001), “Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain: 1. Coulomb mixture theory”, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **106(B1)**, pp.537-552, DOI: 10.1029/2000JB900329.

[3] V. Medina, M. Hürlimann, A. Bateman (2008), “Application of FLATModel, a 2D finite volume code, to debris flows in the northeastern part of the Iberian Peninsula”, *Landslides*, **5(1)**, pp.127-142, DOI: 10.1007/s10346-007-0102-3.

[4] R.P. Denlinger, R.M. Iverson (2004), “Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: 1. Theory and computation”, *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, **109(F1)**, DOI: 10.1029/2003JF000085.

[5] E.D.F. Nieto, F. Bouchut, D. Bresch, et al. (2008), “A new savage-hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami”, *J. Comput. Phys.*, **227(16)**, pp.7720-7754, DOI: 10.1016/j.jcp.2008.04.039.

[6] A. Voellmy (1955), https://cir.nii.ac.jp/crid/1571417125468650496# citations_container, accessed 19 October 2020.

[7] S. Nickovic, G. Pejanovic, V. Djurdjevic, et al. (2010), “HYPROM hydrology surface-runoff prognostic model: Hydrology prognostic model”, *Water Resour. Res.*, **46(11)**, DOI: 10.1029/2010WR009195.

[8] R.F. Dressler (1958), “Unsteady non-linear waves in sloping channels”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci.*, **247**, pp.186-198, DOI: 10.1098/rspa.1958.0177.

[9] A. Mangeney, P. Heinrich, R. Roche (2000), “Analytical solution for testing debris avalanche numerical models”, *Pure Appl. Geophys.*, **157**, pp.1081-1096.

[10] C. Anczy, R.M. Iverson, M. Rentschler, et al. (2008), “An exact solution for ideal dam-break floods on steep slopes: Dam-break problem on sloping bed”, *Water Resour. Res.*, **44(1)**, DOI: 10.1029/2007WR006350.