

Giả thuyết Hayman trong trường số phức và p -adic

Vũ Hoài An*

Trường Cao đẳng Hải Dương

Ngày nhận bài 30/9/2016, ngày chuyển phản biện 6/10/2016, ngày nhận phản biện 7/11/2016, ngày chấp nhận đăng 8/12/2016

Mục đích của bài viết này là thiết lập một số kết quả về Giả thuyết Hayman trên trường phức và p -adic. Ở đây, tác giả xem xét vấn đề chia sẻ giá trị, một số phiên bản của Giả thuyết Hayman đối với các đa thức vi phân dạng $f^n ((f)^{n_1})^{(t_1)} \dots ((f)^{n_k})^{(t_k)}$ trên trường phức và p -adic, các toán tử sai phân và đa thức sai phân dạng $P(f) (\Delta_c^l f)^{k_l} \dots (\Delta_c^q f)^{k_q}$ và $P(f) (f(z+e))^{q_1} \dots (f(z+ke))^{q_k}$ trên trường p -adic.

Từ khóa: Giả thuyết Hayman, hàm phân hình, p -adic, trường số phức.

Chỉ số phân loại: 1.1

Hayman conjecture in the complex and p -adic fields

Summary

The purpose of this paper is to establish some results on the Hayman Conjecture in the complex and p -adic fields. The author discusses the value-sharing problem, some versions of the Hayman conjecture for differential polynomials of the form $f^n ((f)^{n_1})^{(t_1)} \dots ((f)^{n_k})^{(t_k)}$ in the complex and p -adic fields, and difference operators and difference polynomials of the forms $P(f) (\Delta_c^l f)^{k_l} \dots (\Delta_c^q f)^{k_q}$ and $P(f) (f(z+e))^{q_1} \dots (f(z+ke))^{q_k}$ in a p -adic field.

Keywords: complex field, Hayman conjecture, meromorphic functions, p -adic.

Classification number: 1.1

1. Mở đầu

Lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna [1] xây dựng được xem là thành tựu đẹp đẽ nhất của toán học thế kỷ XX, mà ngày nay được gọi là lý thuyết Nevanlinna. Nội dung chính của lý thuyết phân bố giá trị là hai Định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất là mở rộng Định lý cơ bản của đại số, mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Định lý cơ bản thứ hai là mở

rộng Định lý Picard [1], mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đến sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị là vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng phức qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm của Nevanlinna [1]. Hà Huy Khoái [2-6] là người đầu tiên xây dựng tương tự lý thuyết phân bố giá trị cho trường p -adic. Ông và các học trò đã thiết lập các kết quả tương tự lý thuyết Nevanlinna cho trường số phức p -adic mà ngày nay thường gọi là lý thuyết Nevanlinna p -adic. Họ đã đưa ra hai Định lý chính cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình p -adic. Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị trong trường p -adic là vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng p -adic qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là tương tự của Định lý 4 điểm, Định lý 5 điểm cho trường p -adic. Vấn đề xác định duy nhất liên quan chặt chẽ đến vấn đề nhận giá trị. Các kết quả liên quan đến hai vấn đề này là sâu sắc và phong phú. Mục đích của bài báo này là xét vấn đề nhận giá trị đối với đa thức vi phân của hàm phân hình phức và p -adic - vấn đề liên quan mật thiết đến Giả thuyết Hayman mà chúng tôi sẽ đề cập đến ngay sau đây.

*Tác giả liên hệ: Email: vuhoaiantai@yahoo.com

2. Giả thuyết Hayman trong trường số phức

Hiện nay, phân bố giá trị và vấn đề xác định duy nhất đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đa thức vi phân của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman [1]. Năm 1967, Hayman [1] cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman [1, 7]. Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng.

Giả thuyết Hayman đã được Hayman [1] kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$, đã được Clunie [7] kiểm tra đối với $n \geq 1$. Liên quan đến Giả thuyết Hayman là vấn đề nhận giá trị của đa thức vi phân. Hiện nay, vấn đề nhận giá trị của đa thức vi phân là lĩnh vực nghiên cứu mạnh mẽ và sôi động với nhiều kết quả sâu sắc.

Năm 2006, Nevo - Pang - Zalcman [8] đã nhận được kết quả sau:

Định lý 1 [8]. Nếu f là hàm phân hình siêu việt trên $\mathbb{C}$ và $n \geq 1$ thì $f^n(z)f'(z)$ nhận giá trị phức khác 0 bất kỳ vô hạn lần.

Chú ý rằng, ta có thể viết $f^n f' = \frac{1}{n+1}(f^{n+1})'$. Khi đó, Giả thuyết Hayman làm nảy sinh vấn đề nhận giá trị của đạo hàm bậc cao của hàm phân hình. Năm 2007, Bhoosnurmath - Dyavanal [9] đã đưa ra định lý sau đây:

Định lý 2 [9]. f là hàm phân hình siêu việt trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương với $n \geq k + 3$. Khi đó $(f^n)^{(k)}$ nhận giá trị phức khác 0 bất kỳ vô hạn lần.

Quan sát Định lý 1, 2, ta thấy hai định lý này không suy ra được hàm là hằng - đòi hỏi trực tiếp của Giả thuyết Hayman. Từ nhận xét này, chúng tôi thấy cần thiết phải thiết lập kiểu định lý để từ đó trực tiếp kiểm tra được Giả thuyết Hayman. Năm 2012, Hà Huy Khoái - Vũ Hoài An [5] đã đưa ra kết quả sau:

Định lý 3 [5]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương, $n \geq k + 3$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Nếu $(f^n)^{(k)}(z) \neq a$, với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng.

Để chứng minh Định lý 3, ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 4 [5]. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương, $n > k$ và a là cực điểm của f . Khi đó

$$(f^n)^{(k)} = \frac{\varphi_k}{(z-a)^{np+k}}, \text{ ở đó } \varphi_k \text{ là hàm chỉnh hình}$$

trong lân cận của a , $p = \mu_f^\infty(a)$, $\varphi_k(a) \neq 0$

Bổ đề 5 [5]. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương, $n > k$, a và b là cực điểm và không điểm của f . Khi đó

i)

$$\frac{(f^n)^{(k)}}{f^{n-k}} = \frac{h_k}{(z-a)^{pk+k}}, \text{ ở đó } p = \mu_f^\infty(a), h_k(a) \neq 0$$

ii)

$$\frac{(f^n)^{(k)}}{f^{n-k}} = (z-b)^{(m-1)k} S_k, \text{ ở đó } m = \mu_f^0(b), S_k(b) \neq 0$$

Bổ đề 6 [5]. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương, $n \geq k + 1$. Khi đó

$T(r, f) \leq T(r, (f^n)^{(k)}) + S(r, f)$, nói riêng $(f^n)^{(k)}$ là khác hằng.

Bổ đề 7 [5]. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương, $n \geq k + 3$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Khi đó

$$\frac{n-k-2}{n+k} T(r, f) \leq N_1(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)}-a}) + S(r, f)$$

Chứng minh của Định lý 3

Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Từ đây, $n \geq k + 3$ và theo Bổ đề 7 ta có

$$\frac{n-k-2}{n+k} \leq \frac{N_1(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)}-a})}{T(r, f)} + \frac{S(r, f)}{T(r, f)}$$

Cho r tiến ra vô hạn ta nhận được $\frac{N_1(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)}-a})}{T(r, f)} > 0$ với r đủ lớn nào đó. Khi đó $(f^n)^{(k)}$ nhận giá trị a .
Mâu thuẫn. Vậy f là hằng trên $\mathbb{C}$.

Năm 2016, Hà Huy Khoái - Vũ Hoài An [5] đã tổng quát hóa Định lý 3 cho đa thức vi phân kiểu $P = f^n((f)^{n_1(t_1)} \dots ((f)^{n_k})^{(t_k)})$. Họ đã nhận được kết quả sau:

Định lý 8 [5]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, $k, n_1, n_2, \dots, n_k, t_1, t_2, \dots, t_k$ là các số nguyên dương, n là số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện

$$n_j \geq t_j \text{ với mọi } 1 \leq j \leq k, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq 3 + \sum_{j=1}^k t_j,$$

$a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Nếu $P \neq a$, với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng.

Để chứng minh Định lý 8 ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 9 [5]. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $k, n_1, n_2, \dots, n_k, t_1, t_2, \dots, t_k$ là các số nguyên dương, n là số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $n_j \geq t_j$ với mọi $1 \leq j \leq k, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq 3 + \sum_{j=1}^k t_j, a \in \mathbb{C}, a \neq 0$.
Khi đó

$$\frac{n + \sum_{j=1}^k n_j - \sum_{j=1}^k t_j - 2}{n + \sum_{j=1}^k n_j - 1} T(r, f) \leq \frac{1}{n + \sum_{j=1}^k n_j - 1} N_1(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - a}) + S(r, f).$$

Chứng minh Định lý 8

Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Từ đây, $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq 3 + \sum_{j=1}^k t_j$ và Bổ đề 8 ta có

$$\frac{n + \sum_{j=1}^k n_j - \sum_{j=1}^k t_j - 2}{n + \sum_{j=1}^k n_j - 1} \leq \frac{1}{n + \sum_{j=1}^k n_j - 1} \frac{N_1(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - a})}{T(r, f)} + \frac{S(r, f)}{T(r, f)}$$

Cho r tiến ra vô hạn ta nhận được $\frac{N_1(r, \frac{1}{(f^n)^{(k)} - a})}{T(r, f)} > 0$ với r đủ lớn nào đó. Khi đó P nhận giá trị a . Mâu thuẫn. Vậy f là hằng trên $\mathbb{C}$.

Trong những năm gần đây, vấn đề nhận giá trị được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đa thức sai phân, toán tử sai

phân của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Năm 2006, Halburd và Korhonen [10] đã thiết lập tương tự của lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân của hàm phân hình có bậc hữu hạn. Năm 2007, I. Laine và C.C. Yang [11] đã thiết lập tương tự kết quả của Hayman cho một kiểu đa thức sai phân đặc biệt của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn. Hai ông đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lý 10 [11]. Cho f là hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn trên $\mathbb{C}$ và c là một số phức khác 0, n là một số nguyên, $n \geq 2$. Khi đó $f^n(z) f(z+c)$ nhận $a, a \in \mathbb{C}, a \neq 0$, vô hạn lần.

Năm 2009, K. Liu và L.Z. Yang [12] đã thiết lập các kết quả tương tự Định lý 10 cho toán tử sai phân của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn.

3. Giả thuyết Hayman trong trường số p -adic

Trong mục này ta luôn giả thiết $\mathbb{K}$ là một trường đặc số không, đầy đủ với chuẩn không Archimedean và đóng đại số. Các khái niệm, ký hiệu và kết quả dùng trong bài báo này ở các tài liệu [2-6]. Vì chuẩn p -adic tốt hơn chuẩn Euclidean nên nhiều kết quả trong lý thuyết Nevanlinna p -adic tốt hơn các kết quả trong lý thuyết Nevanlinna. Chẳng hạn, từ Định lý Picard p -adic [2] có thể suy ra rằng: Nếu một hàm nguyên f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z) f'(z) \neq 1$ với $n \geq 1$ là một số nguyên dương và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng. Vì vậy, sau đây chúng tôi sẽ nêu ra tương tự của Giả thuyết Hayman cho trường p -adic đối với hàm phân hình trên $\mathbb{K}$.

Giả thuyết Hayman p -adic [5]. Nếu một hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z) f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J. Ojeda [13]. Năm 2008, J. Ojeda [13] đã nhận được kết quả sau:

Định lý 11 [13]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}$, $n > 2$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Khi đó nếu $f^n(z) f'(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Năm 2014, A. Escassut và J. Ojeda [14] đã xem xét Định lý 11 trong trường hợp $n = 2$. Gần đây, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An [3-5], Hà Huy Khoái, Vũ Hoài An và Nguyễn Xuân Lai [6], Vũ Hoài An - Lê Thị Hoài Thu [15] đã thiết lập các kết quả tương tự các Định lý 3, 8, 10 cho đa thức vi phân, toán tử sai phân, đa thức sai phân của hàm phân hình trên $\mathbb{K}$. Các kết quả này đã góp phần khẳng định Giả thuyết Hayman p -adic. Năm 2011, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An [3] đã tổng quát hóa kết quả của J. Ojeda [13] cho đa thức vi phân kiểu $f^n((f)^{(k)})^m$. Họ đã nhận được kết quả sau:

Định lý 12 [3]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn điều kiện $f^n((f)^{(k)})^m(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ và các số nguyên không âm m, n, k . Khi đó f là đa thức bậc $< k$ nếu một trong các điều kiện sau đây xảy ra:

- i) f là một hàm nguyên
- ii) $k > 0$ và $m = 1, n > \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$ hoặc $m > 1, n \geq 1$

Định lý 13 [6]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}$, n, k là các số nguyên dương, $n \geq k + 2, a \in \mathbb{K}, a \neq 0$. Nếu $(f^n)^{(k)}(z) \neq a$, với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng. Cho đa thức vi phân $P = f^n((f)^{n_1})^{(t_1)} \dots ((f)^{n_k})^{(t_k)}$ trên $\mathbb{K}$. Khi đó ta có:

Định lý 14 [5]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}$, $k, n_1, n_2, \dots, n_k, t_1, t_2, \dots, t_k$ là các số nguyên dương, n là số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện

$$n_j \geq t_j \text{ với mọi } 1 \leq j \leq k, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq 2 + \sum_{j=1}^k t_j$$

$a \in \mathbb{K}, a \neq 0$. Nếu $P \neq a$, với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}$. Toán tử sai phân cấp $n + 1$ của f được xác định như sau:

$$\Delta_c f = f(z + c) - f(z), \Delta_c^1 f = \Delta_c f, \dots, \Delta_c^{n+1} f = \Delta_c^n (f(z + c) - f(z))$$

$n = 1, 2, \dots$, ở đó $c \in \mathbb{K}$ là một hằng số khác 0.

Cho P là đa thức bậc n trên $\mathbb{K}$. Viết $P = a_0(z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_s)^{m_s}$.

Định lý sau đây khẳng định Giả thuyết Hayman p -adic đối với toán tử sai phân p -adic.

Định lý 15 [4]. Cho f hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$ và $n, k_i, s, q, i = 1, 2, \dots, q$ là các số nguyên dương, $s \geq 1, q \geq 1, k_i \geq 1, n \geq \sum_{i=1}^q (2k_i + 1)2^i + q +$

$s + 1 - 3 \sum_{i=1}^q k_i$, và $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$. Khi đó $P(f)(\Delta_c^1 f)^{k_1} \dots (\Delta_c^q f)^{k_q}$ nhận giá trị a .

Định lý sau đây khẳng định Giả thuyết Hayman p -adic đối với đa thức sai phân p -adic.

Định lý 16 [4]. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$, $n, q_i, s, k, i = 1, \dots, k$ là các số nguyên dương, $s \geq 1, q_i \geq 1, k \geq 1, n \geq \sum_{i=1}^k q_i + 2k + s + 1, a \in \mathbb{K}, a \neq 0$. Khi đó $P(f)(f(z + c))^{q_1} \dots (f(z + kc))^{q_k}$ nhận giá trị a .

Trong trường p -adic nhiều biến, Vũ Hoài An - Lê Thị Hoài Thu [15] nhận được kết quả sau:

Định lý 17 [15]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}^m$ và n là số nguyên dương, $n > 1$. Giả sử rằng $f^n \frac{\partial f}{\partial z_k}$ không nhận giá trị 1, với mỗi $k = 1, \dots, m$. Khi đó f là hàm hằng.

Tài liệu tham khảo

- [1] W.K Hayman (1964), *Meromorphic Functions*, Clarendon, Oxford.
- [2] P.C. Hu and C.C. Yang (2000), *Meromorphic functions over non-Archimedean fields*, Kluwer.
- [3] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2011), "Value distribution problem for p -adic meromorphic functions and their derivatives", *Ann. Fac. Sc. Toulouse, XX (Special)*, pp.135-149.
- [4] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2012), "Value - sharing problem for p -adic meromorphic functions and their difference operators and difference polynomials", *Ukrainian Math. J.*, **64**(2), pp.147-164.
- [5] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2016), *Hayman's conjecture in complex - p -adic fields*.
- [6] Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2012), "Value sharing problem and Uniqueness for p -adic meromorphic functions", *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, **38**, pp.71-92.
- [7] J. Clunie (1967), "On a result of Hayman", *J. London Math. Soc.*, **42**, pp.389-392.
- [8] S. Nevo, X. Pang, and L. Zalcman (2006), "Picard-Hayman behavior of derivatives of meromorphic functions with multiple zeros", *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **12**, pp.37-43.
- [9] Subhas S. Bhoosnurmath and Renukadevi S. Dyavanal (2007), "Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions", *Computers and Mathematics with Applications*, **53**, pp.1191-1205.
- [10] R.G. Halburd and R.J. Korhonen (2006), "Nevanlinna theory for the difference operator", *Ann.Acad.Sci.Fenn.Math.*, **31**, pp.463-478.
- [11] I. Laine and C.C. Yang (2007), "Value distribution of difference polynomials", *Proceedings of the Japan Academy, Series A83*(8), pp.148-151.
- [12] K. Liu and L.Z. Yang (2009), "Value distribution of the difference operator", *Archiv der Mathematik*, **92**(3), pp.270-278.
- [13] J. Ojeda (2008), "Hayman's conjecture in a p -adic field", *Taiwanese J. Math.*, **9**, pp.2295-2313.
- [14] A. Escassut and J. Ojeda (2014), "The p -adic Hayman Conjecture when $n=2$ ", *Complex Variable and Elliptic Equations*, **59**(10), pp.1451-1456.
- [15] Vu Hoai An and Le Thi Hoai Thu (2012), "Hayman Conjecture for p -adic meromorphic functions in several variables, p -Adic Numbers", *Ultrametric Analysis and Applications*, **4**(3), pp.231-243.